PART3 $f(ax+b)$ の不定積分

要点整理と公式

要点 ① $f(ax+b)$ の不定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とする。このとき，a，b を定数とすると，合成関数の微分法により

$$\{F(ax+b)\}' = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

である。よって，次の公式が得られる。

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$a \neq 0$ のとき

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

(ex) $\displaystyle\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x+1)^4+C = \frac{1}{8}(2x+1)^4+C$

$$\int \cos 5\theta d\theta = \frac{1}{5}\sin 5\theta + C$$

$$\int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}e^{3x-2}+C$$

[MEMO]

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

(2) $\int \frac{2}{2x-1}\,dx$

(3) $\int \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)d\theta$

(4) $\int (e^{-2x}+3^{4x-3})\,dx$

Point Pickup

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$a \fallingdotseq 0$ のとき

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

$ax+b$ を 1 つのかたまりと捉えて積分したものに，$\frac{1}{a}$ をかける。

第15講 PART3 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，C は積分定数とする。

1 $\int \sqrt{2x-1}\,dx = \boxed{\text{ア}} + C$

① $\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}$　② $(2x-1)\sqrt{2x-1}$

③ $\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$　④ $\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

2 $\int \frac{6}{3x+1}\,dx = \boxed{\text{イ}} + C$

① $-\frac{6}{(3x+1)^2}$　② $\log|3x+1|$

③ $2\log|3x+1|$　④ $6\log|3x+1|$

3 $\int \sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta = \boxed{\text{ウ}} + C$

① $\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　② $-3\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

③ $-\frac{1}{3}\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　④ $-\frac{1}{3}\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

4 $\int (e^{3x}+5^{2x-1})\,dx = \boxed{\text{エ}} + C$

① $e^{3x}+5^{2x-1}$　② $e^{3x}+\frac{5^{2x-1}}{\log 5}$

③ $3e^{3x}+\frac{2\cdot 5^{2x-1}}{\log 5}$　④ $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}$

PART3 $f(ax+b)$ の不定積分

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)d\theta$

(4) $\displaystyle\int\left(e^{-2x}+3^{4x-3}\right)dx$

[解答]

(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\,dx=\int(3x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\log|2x-1|+C=\log|2x-1|+C$

(3) $\displaystyle\int\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)d\theta=\frac{1}{2}\cdot\left\{-\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+C=-\frac{1}{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+C$

(4) $\displaystyle\int\left(e^{-2x}+3^{4x-3}\right)dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3^{4x-3}}{\log 3}+C=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{3^{4x-3}}{4\log 3}+C$

第15講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$$\int\sqrt{2x-1}\,dx=\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x-1)^{\frac{1}{2}+1}+C \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C}$$

[A]　$f(ax+b)$の不定積分
$F'(x)=f(x)$，$a\neq0$のとき，
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$
ここでは，$f(t)=\sqrt{t}$，
$f(2x-1)=\sqrt{2x-1}$ と考える。

2

[正解] イ：③

[解説]

$$\int\frac{6}{3x+1}dx=6\int\frac{dx}{3x+1}$$

$$=6\cdot\frac{1}{3}\log|3x+1|+C \quad \text{[B]}$$

$$=\boldsymbol{2\log|3x+1|+C}$$

[B]　$f(ax+b)$の不定積分
$F'(x)=f(x)$，$a\neq0$のとき，
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$
ここでは，$f(t)=\frac{1}{t}$，
$f(3x+1)=\frac{1}{3x+1}$ と考える。

3

[正解] ウ：④

[解説]

$$\int\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta=\frac{1}{3}\cdot\left\{-\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}+C \quad \text{[C]}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)+C}$$

[C]　$f(ax+b)$の不定積分
$F'(x)=f(x)$，$a\neq0$のとき，
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$
ここでは，$f(t)=\sin t$，
$f\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ と考える。

4

[正解] エ：④

[解説]

$$\int(e^{3x}+5^{2x-1})dx=\int e^{3x}dx+\int 5^{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{2x-1}}{\log 5}+C \quad \text{[D]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}+C}$$

[D] $\int e^x dx=e^x+C$

$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\log a}+C$